代数幾何学シンポジウム記録
1991年度 pp.82-102

Classification of Non-rigid Families of Abelian Varieties

Masa-Hiko Saito (齋藤 政彦)
Kyoto University (京都大学理学部)

1 序

この小文では $\mathbf{C}$ 上定義されたの非特異な準射影的代数多様体 S 上の偏極アーベル多様体の family(正確には S 上の abelian scheme) で、non-rigid な (S を固定したまま自明でない変形を許す) ものの分類を報告する。 この研究の動機は, Faltings のアーベル多様体に対する Arakelov 型定理 [1983, Fa1] である。 Faltings の定理を述べる前に、まずその源となった Arakelov の結果を述べておこう。

定理 1.1 (**[A]**) B を $\mathbf{C}$ 上の非特異完備代数曲線、 Σ を B の有限個の閉点の集合、 g を非負整数とする。$\mathcal{C}_g(B,\Sigma)$ を B 上の種数 g の安定曲線の族 $f : X \longrightarrow B$ で、$B-\Sigma$ 上 *smooth* なものの同形類の集合とする。さらに、$\mathcal{RC}_g(B,\Sigma) \subset \mathcal{C}_g(B,\Sigma)$ を、*non-isotrivial* な[1]族からなる部分集合とする。 $g \geq 2$ の時、次が成立する。

(i) $\mathcal{C}_g(B,\Sigma)$ は、有界。 (即ち、 $\mathcal{C}_g(B,\Sigma)$ は scheme of finite type.)

(ii) $f : X \longrightarrow B \in \mathcal{RC}_g(B,\Sigma)$ ならば、 f は $\mathcal{C}_g(B,\Sigma)$ の元として *rigid* (即ち、 B と Σ を固定した時非自明な変形を持たない) 。

特に $\mathcal{RC}_g(B,\Sigma)$ は有限集合。

この定理は、 1962 年の Stockholm の ICM に於いて、 Shafarevich が提出した次の予想の関数体類似である。

予想 1.1 (= **Faltings theorem [Fa2]**) K を代数体、 Σ を K の素点からなる有限集合とする。 $\mathcal{C}_g(K,\Sigma)$ を K 上定義された種数 g の代数曲線で、 Σ 以外では *good reduction* を持つもの同形類のなす集合とする。 $g \geq 2$ とすれば $\mathcal{C}_g(K,\Sigma)$ は有限集合。

この予想は良く知られているように, 1 9 8 3 年に Faltings[Fa2] により解決され, またいわゆる "Parshin trick" から Mordell 予想はこの定理に帰着され証明された。この

[1] f が isotrivial とは、適当な有限底変換 $\pi : B' \longrightarrow B$ により $f' : X \times_B B' \longrightarrow B'$ が自明な族と双有理同値となるときに言う。

定理はトレリの定理より対応する主偏極アーベル多様体の有限性定理に帰着され Faltings はそれを示した訳であるが、彼はそれより少し前に関数体上の偏極アーベル多様体に対する Arakelov 型定理 [Fa1] を証明している。

定理 1.2 ([Fa1]) (B,Σ) は *Th. 1.1* の通りとする。$\mathcal{A}_g(B,\Sigma)$ を $B-\Sigma$ 上の g 次元主偏極アーベリアンスキームの同形類のなす集合、$\mathcal{A}_g(B,\Sigma)^*$ を §*2* の *(2.1)* の条件 $(*)$ を満たすものからなる $\mathcal{A}_g(B,\Sigma)$ の部分集合とする。 この時次が成り立つ。

(1) (有界性) $\mathcal{A}_g(B,\Sigma)$ は、*scheme of finite type*。

(2) (Rigidity) $[f] := (f : X \longrightarrow B, \lambda)$ が *rigid* $\Leftrightarrow$ $[f]$ が条件 $(*)$ を満たす。

特に $\mathcal{A}_g(B,\Sigma)^*$ は有限集合。

この定理は Arakelov の定理 1.1同様、有界性[2]はそのまま成立するが、rigidity についてはより複雑な条件 $(*)$ が必要十分に成っていること示している。実際 Faltings は同論文に於て条件 $(*)$ を満たさず isotrivial part を持たない例を構成している。これは、8 次元のアーベル多様体のファミリーで実 2 次体上の四元数体から構成される久賀 - 佐武 - 志村ファーバー空間として与えられる。 一方 Deligne は [D1] で、$g \leq 3$ の時ファミリーが isotrivial part を持たなければ、条件 $(*)$ を(正確には、$(*)$ より強い条件 (T))を満たすことを示している。(§2 を見よ。)

このような結果から、例えば $4 \leq g \leq 7$ の時、相対次元 g の non-rigid abelian scheme が存在するか、また non-rigid abelian scheme の例はどのように構成されるか等の問題が自然に現われてくる。

この報告では、[Sa1] の non-rigid abelian scheme のほぼ完全な分類結果を紹介する。結論から言うと $g \leq 7$ ならば、isotrivial part を持たない abelian scheme は rigid であることが示され、Faltings の例が non-rigid な例の相対次元最小のものとなっている事が解かる。また、分類結果から特に一般ファイバーの準同形環に著しい制限があること解かりその帰結として相対次元 g の制限が得られる。 また、証明の副産物として興味深いモノドロミー表現による rigidity の十分条件も得られる。詳しい証明等は [Sa1] を見ていただきたい。また K3 曲面に対する同様の結果は齋藤 -Zucker[Sa-Z] に有る。

2 条件 $(*)$

本節では条件 $(*)$ を説明し、 rigidity との関係を述べる。

[2]有界性については野口 [N1]、Deligne[D2] も別証を与えている。これについては §7 を参照のこと。

2.1 Abelian scheme と VHS

最初に記号等の準備をする。

以下 S は $\mathbf{C}$ 上定義された非特異連結準射影多様体とする。

$[f] := (f : X \longrightarrow S, \lambda)$ を S 上の偏極 abelian scheme とする。すなわち、

(i) $f : X \longrightarrow S$: smooth, proper group scheme over S with connected geometric fibers,

(ii) $\lambda : X \longrightarrow X^{\vee} := Pic^0(X/S)$ polarization,

の対とする。$Ker\lambda$ は S 上の finite group scheme で、閉点 $s \in S$ について、ファイバーは $(\mathbf{Z}/\delta_1\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/\delta_2\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/\delta_g\mathbf{Z})^{\oplus 2}$, $(\delta_i|\delta_{i+1})$ と同型となる。この時 λ は type $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_g)$ と呼ばれる。

$$\mathcal{A}_{g,\delta}(S) = \left\{ \begin{array}{ll} (f : X \longrightarrow S, \lambda) & \text{偏極 abelian scheme over } S \\ \text{of rel. dim} = g, & \text{with the polarization of type } \delta \end{array} \right\} / \text{isom.}$$

次に偏極 VHS(polarized Variation of Hodge Structure) の定義をする。

定義 2.1 三つ組 $(\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}, \{\mathcal{F}^p\}, Q)$ が S 上の重さ *-1(resp. 1)* の偏極 *VHS(polarized variation of Hodge structiure)* であるとは、

(i) $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ が S 上の *rank* $2g$ の $\mathbf{Z}$-加群の局所系,

(ii) *Hodge filtration*: $\mathbf{W}_{\mathcal{O}} := \mathbf{W}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$ の局所自由層による減少フィルター列

$$0 = \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^{-1} = \mathbf{W}_{\mathcal{O}_S},$$

$$(resp. \qquad 0 = \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^0 = \mathbf{W}_{\mathcal{O}_S}),$$

であり、

$$\mathcal{F}^0 \oplus \overline{\mathcal{F}^0} \cong \mathbf{W}_{\mathcal{O}_S}. \qquad (resp. \mathcal{F}^1 \oplus \overline{\mathcal{F}^1} \cong \mathbf{W}_{\mathcal{O}_S}.)$$

を満たす。このフィルトレーションにより、各閉点 $s \in S$ に対し $\mathbf{W}_{\mathbf{R},s} := \mathbf{W}_{\mathbf{Z},s} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ の *Weil* 作用素 C_s が定まる。

(iii) 偏極 Q: $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ 上の平坦整係数シンプレクティック双1次形式 Q で各点 s について $Q_s(x, C_s y)$ は $\mathbf{W}_{\mathbf{R},s}$ 上の正定値対称形式となるもの。

各点 $s \in S$ に対し偏極 Q は適当に $\mathbf{W}_{\mathbf{Z},s}$ の基底をとれば、s によらず、次の形の行列により表現される。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \delta_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \delta_g \\ \hline -\delta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\delta_g & & & \end{array}\right)$$

ただし、ここで $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_g)$ は $(\delta_i|\delta_{i+1})$ を満たす正整数列である。この時 Q を type δ の偏極と言う。

ここで

$$VH^{-1}_{g,\delta}(S) := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}, \{\mathcal{F}^p\}, Q) \quad S \text{ 上の type } \delta \text{ の偏極を持つ} \\ \text{重さ -1 の VHS s.t. } rank_{\mathbf{Z}}\mathbf{W}_{\mathbf{Z}} = 2g. \end{array} \right\} /isom.$$

と置く。

さて $(f : X \longrightarrow S, \lambda) \in \mathcal{A}_{g,\delta}(S)$ に対し、$\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X$ を、ファイバーの 1 次ホモロジー群から定まる局所系とする時

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X \longrightarrow Lie(X/S) \longrightarrow \mathcal{O}^{an}_S(X) \longrightarrow 0.$$

なる S^{an} 上の層の完全列が存在する。但し $Lie(X/S)$ は f の Lie algebra の層。さらに、

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{-1} & = & \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}_S} \mathcal{O}_S \\ \cup & & \\ \mathcal{F}^0 & = & \ker\{\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}_S} \mathcal{O}_S \longrightarrow Lie(X/S)\} \end{array}$$

と置くと、$\{\mathcal{F}^p\}$ は重さ -1 の Hodge filtration を与える。また、type δ の偏極 λ から、$\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X$ 上の同じ type の偏極 Q が得られる。即ち、次の自然な写像が得られる。

$$\begin{array}{rccc} \Phi_S : & \mathcal{A}_{g,\delta}(S) & \longrightarrow & VH^{-1}_{g,\delta}(S) \\ & (X/S, \lambda) & \mapsto & (\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X, \{\mathcal{F}^p\}, Q) \end{array}$$

定理 2.1 ((4.4.3), [D1]) 上の写像 Φ_S は上への同型である。

さらに、次が示される。

定理 2.2 集合 $\mathcal{A}_{g,\delta}(S) \cong VH^{-1}_{g,\delta}(S)$ は、$\mathbf{C}$ 上の商特異点のみを持つ準射影的多様体である。

この定理は、Faltings[Fa1], 野口 [N] の結果から従う。特に、野口の結果からは、さらに詳しい $\mathcal{A}_{g,\delta}(S)$ の構造が解かるがこれらについては§7 で解説する。

2.2 条件 (T) と (*)

さて、$[\mathbf{W_Z}] = (\mathbf{W_Z}, \{\mathcal{F}^p\}, Q) \in VH^{-1}_{g,\delta}(S)$ に対し

$$\mathsf{E_Z} = \mathrm{End}(\mathbf{W_Z}) = H^0(S^{an}, End(\mathbf{W_Z})) \supset \mathsf{E}^Q_{\mathbf{Z}} = \mathrm{End}^Q(\mathbf{W_Z})$$

を、それぞれ $\mathbf{W_Z}$ の（大域平坦準同形からなる）準同形環、そして偏極 Q に関して "*skew*" な元からなる部分環とする。Deligne[D1] によれば、$\mathsf{E_Z}$ は重さ 0 の Hodge 構造を持つ。即ち、次の分解が存在する。

$$\mathsf{E_Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} = \oplus_p \mathsf{E}^{-p,p}, \ \overline{\mathsf{E}^{-p,p}} \cong \mathsf{E}^{p,-p}$$

$(\mathsf{E}^Q_{\mathbf{Z}})^{-p,p} = \mathsf{E}^{-p,p} \cap \mathsf{E}^Q_{\mathbf{Z}}$ と置く。さて、$(f : X \longrightarrow S, \lambda)$ を $[\mathbf{W_Z}]$ に対応する偏極 abelian scheme とする。$(\mathbf{W_Z} \cong \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X)$。$\eta$ を S の生成点、X_η を生成ファイバーとすると X_η は $K = \mathbf{C}(S)$ 上の abelian variety である。$\mathrm{End}_S(X)$ で X の S 上の準同形の成す環を表すと、同形 $\mathrm{End}_S(X) \cong \mathrm{End}_K(X_\eta)$ が存在する。また、自然な単射準同形

$$\phi : \mathrm{End}_S(X) \hookrightarrow \mathsf{E_Z} = \mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X)$$

が存在する。さらにまた [D1] の結果から

$$\phi(\mathrm{End}_S(X)) = \mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X)^{0,0}$$

が成り立つ。

ここで、次の 2 つの条件を考える。

定義 2.2 (1) 条件 (T) $\Leftrightarrow$ ϕ は同形。即ち、$\mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X)$ は type (0,0).

(2) 条件 (*) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{End}^Q(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X) \cong \mathrm{End}^Q(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X)^{0,0}$.

Remark 2.1 A を代数体 K 上定義された abelian variety, $\pi = Gal(\overline{K}/K)$ を K の絶対ガロア群 $T_l(A) = lim_{\leftarrow n} A[l^n](\overline{K})$ を Tate- 加群とする時、Faltings [Fa2] は次の Tate 予想を示した。

(A) π の $T_l(A)$ の作用は半単純。

(B) 写像 $\mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_l \to \mathrm{End}_\pi(T_l(A))$ は同形。

上の条件 (T) はこの (B) に対応し、また (A) は Deligne よる VHS のモノドロミー作用の半単純性に対応している。

Remark 2.2 $R_1 f_* Z_X$ の Hodge タイプは、(-1,0) と (0, -1) なので 条件 (T), 条件 $(*)$ はそれぞれ

$$条件 (T) \Leftrightarrow (\mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C})^{-1,1} = \{0\},$$

$$条件 (*) \Leftrightarrow (\mathrm{End}^Q(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C})^{-1,1} = \{0\}$$

と同値。

Remark 2.3 Deligne は [D1] に於て abelian scheme $f : X \longrightarrow S$ が isotrivial factor を持たず、相対次元 g が 3 以下ならば、条件 (T) が成立することを示している。(4.4.13, [D1])。$g = 4$ の時に条件 (T) を満たさない isotrivial factor を持たない例があるが、条件 $(*)$ は満たす。

さて、これらの条件を polarized abelian scheme の変形と結び付けたのは、Faltings[Fa1] であった。彼自身は S が射影曲線から有限個の点を除いた場合を考察したが、Peters[P] が一般の重さの $\mathbf{Z} - VHS$ と一般の次元の S の場合に拡張した。ここでは、底空間は一般次元とし VHS の重さは -1 として定理を述べよう。

定理 2.3 $[\mathbf{W_Z}] = [\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X] \in VH^{-1}_{g,\delta}(S)$ に対して、(S を固定した)$[\mathbf{W_Z}]$ の変形の局所倉西空間の Zariski 接空間は

$$(\mathrm{End}^Q(\mathbf{W_Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C})^{-1,1}$$

と同形。また、$[\mathbf{W_Z}]$ に於ける $VH^{-1}_{g,\delta}(S)$ 局所解析構造は

$$\mathrm{End}^Q(\mathbf{W_Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C})^{-1,1} / (有限群)$$

の 原点に於ける germ と同形。

系 2.1 偏極 VHS $[\mathbf{W_Z}] = [\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X] \in VH^{-1}_{g,\delta}(S)$ が、rigid になる為の必要十分条件は条件 $(*)$ である。

3 VHS の準同形環

この節では abelian scheme $f : X \longrightarrow S$ に対応する偏極 VHS $\mathbf{W_Z} = \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X$ の準同形環 $\mathsf{E}_{\mathbf{Z}}$ または $\mathsf{E} := \mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Q}_X)$ の性質を述べる。最も基本的なのは次の定理である。

定理 3.1 **((4.2.6) and (4.2.8) in [D1]).** $f : X \longrightarrow S$, $\mathbf{W_Q} := \mathrm{R}\ f_*\mathbf{Q}_X$ を上の通り、$s \in S$ を閉点をする。次が成立する。

(i) $\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}$ への $\pi_1(S,s)$ の作用は半単純。

(ii) 準同形環 $\mathsf{E} = \mathrm{End}(\mathbf{R}_1 f_*\mathbf{Q}_X)$ は半単純環で、自然な重さ *0* の *Hodge* 構造を持つ。

(iii) E の中心は *type (0,0).*

定義 3.1 S 上の $\mathbf{Q}$- 局所系 T が互いに同形な既約局所系の和である時、*"primary"* と呼ばれる。

定理 3.1, (i) より、偏極 $\mathbf{Q}$-VHS$\mathbf{W_Q}$ は分解

$$\mathbf{W_Q} = (\mathbf{V}_1)^{n_1} \oplus (\mathbf{V}_2)^{n_2} \oplus \cdots \oplus (\mathbf{V}_t)^{n_t}$$

を持つ。但し $\mathbf{V}_i$ は既約部分局所系で、$i \neq j$ ならば $\mathbf{V}_i \not\simeq \mathbf{V}_j$ ある，各部分局所系 $(\mathbf{V}_i)^{n_i}$ は $\mathbf{W_Q}$ の primary 成分と呼ばれるが、各 primary 成分は Weil 作用素の作用により安定的、即ち部分 $\mathbf{Q}$-VHS である。

以下 $\mathbf{Q}$-VHS$\mathbf{W_Q}$ は "primary" と仮定しよう。ここで、$\mathbf{V}$ を $\mathbf{W_Q}$ の既約 $\mathbf{Q}$- 部分局所系とし、

$$D = \mathrm{End}(\mathbf{V}), \qquad F = Cent(D), \qquad U = \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W_Q}) \tag{1}$$

と置く。Schur の補題より、D は $\mathbf{Q}$ 上の斜体 (division algebra)、F は $\mathbf{Q}$ の有限次拡大体である。$\mathbf{V}$ は自然に左 D- 加群の局所系、U は右 D- 加群の構造を持つが、

$$[F : \mathbf{Q}] = d, \qquad [D : F] = r^2$$

$$\dim_D U = m, \qquad \mathrm{rank}_D \mathbf{V} = n.$$

と置こう。

命題 3.1 上の記号の下に次が成立する。

$$\mathbf{W_Q} \cong U \otimes_D \mathbf{V} \tag{2}$$

$$\mathsf{E} = \mathrm{End}(\mathbf{W_Q}) \cong \mathrm{End}_{\overline{D}}(U) \tag{3}$$

Proof: 佐武 [S1], Ch.VI の Lemma1.1 による。

さらに 偏極 Q により、 $\mathbf{W_Q}$ は自己双対的である。閉点 $s \in S$ を固定し

$$\mathsf{E} \cong \mathrm{End}_{\pi_1(S,s)}(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}) \subset \mathrm{End}(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s})$$

と言う同一視を行なう。Q_s のアジョイントにより、 $\mathrm{End}(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s})$ の'対合 (involution)' (=反同形で次数 2以下のもの) ι_s が定まるが、 この Q_s が $\pi_1(S,s)$- 不変であることから ι_s は上の同一視のもとで E の対合

$$\iota : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$$

を導く。 ι_s は $\mathrm{End}(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s})^{0,0} \cong \mathrm{End}(A_s) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ に制限すると、対応する偏極 λ_s が導く Rosati 対合に一致する事も解かる。 さらに、 $\mathbf{W_Q}$ に属する既約部分局所系 $\mathbf{V}$ も自己双対的である事が解かり $D = \mathrm{End}(\mathbf{V})$ 上に対合 ι_0 が定まり、さらに $F = Cent(\mathsf{E}) = Cent(D)$ は ι 及び ι_0 によって安定的で $\iota_{0|F} = \iota_{|F}$ となる。さて命題 3.1(iii) から F は type (0,0) でありこのことから $\iota_{0|F} = \iota_{|F}$ は正対合である事が従う。即ち $x \in F^\times$ に対し $Tr_{F/\mathbf{Q}}(xx^\iota) > 0$ である。 よって Albert の分類から次が従う。

命題 3.2 上の記号と仮定の下に次のいずれかが成立する。
(i) F は総実代数体、かつ $\iota_{|F} = id$ である。
(ii) F は CM 体、かつ $\iota_{|F}$ は複素共役である。

4 偏極の分解と係数拡大

さてここで、分類の核になる偏極 Q の、命題 3.1の $\mathbf{W_Q}$ の分解 (2) に対応する分解と、また係数拡大について述べる。

4.1 偏極の分解

k を標数 0 の体、 D を k 上の斜体とする。 F を D の中心とし、 $[F : k] = d, [D : F] = r^2$ と置く。 ι_0 を D 上の対合, T を有限生成右 D- 加群とする。 $\epsilon = \pm 1$ とする時、 ι_0 に対する (D, ϵ)- エルミート形式 h とは, k- 双線形写像 $h : T \times T \longrightarrow D$ であって次の性質を満たすものである。

$$h(v, v'\alpha) = h(v, v')\alpha, \tag{4}$$

$$h(v', v) = \epsilon h(v, v')^{\iota_0}, \text{ for all } v, v' \in T, \alpha \in D \tag{5}$$

(D,ϵ)- エルミート形式 h は、ある T の D- 基底に対する行列表示が可逆である時 非退化と呼ばれる。ι_0 に対する非退化 (D,ϵ)- エルミート形式 h に対して

$$U(T,h) = \{g \in GL(T/D) | h(vg, v'g) = h(v,v') \ (v,v' \in T)\} \tag{6}$$

$$SU(T,h) = U(T,h) \cap SL(T/D) \tag{7}$$

と置く。 これらは F- 代数群であるが、さらに、*Weil* の係数制限 $R_{F/k}$ により、k 上の代数群とも思える。（T' が、左 D- 加群の時は、D の opposite algebra $\overline{D}$ 上の右加群と思って同様に定義する。）

命題 4.1 命題 *3.1*の仮定と記号の下に次が成立する。D 上の対合 ι_0 に対する左 D- 加群の局所系 $\mathbf{V}$ 上の、平坦な非退化 $(\overline{D},\epsilon)$ エルミート形式 $\mathbf{h}$ と、右 D- 加群 U 上の非退化 $(D,-\epsilon)$ エルミート形式 h' が存在し、$\mathbf{W_Q} = U \otimes_D \mathbf{V}$ 上の偏極 Q は

$$Q = Tr_{D/\mathbf{Q}}(h' \otimes_D \mathbf{h}) \tag{8}$$

と表される。ここで、符号 $\epsilon = \pm 1$ は、ι_0 が第1種対合の時は Q により唯一に定まり、第2種の時は任意である。

4.2 係数拡大

命題 3.1の primary Q-VHS の分解 $\mathbf{W_Q} = U \otimes_D \mathbf{V}$ と命題 4.1の偏極 Q の分解が得られたが、それらの $\mathbf{R}$ への係数拡大を考察しよう。

D の中心 F と対合 ι_0 に対し $F^+ = \{z \in F | z^{\iota_0} = z\}$ と置くと、F^+ は総実代数体であり命題 3.2により、次のいずれかが成り立つ。

(R) $F = F^+$ で F は総実代数体。

(C) F は F^+ の総虚な2次拡大。

$[F^+ : \mathbf{Q}] = t$ と置き、$\{\tau_i : F^+ \hookrightarrow \mathbf{R}, 1 \le i \le t\}$ を F^+ の異なる t 個の $\mathbf{R}$ への埋め込みとする。

$$\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{W_Q} \otimes_{F^+,\tau_i} \mathbf{R} \tag{9}$$

と置くと $\mathbf{W}^{(i)}$ は $\mathbf{R}$- ベクトル空間の局所系 $\mathbf{W_R} := \mathbf{W_Q} \otimes_\mathbf{Q} \mathbf{R}$ の部分局所系であり直和分解

$$\mathbf{W_R} = \oplus_{i=1}^t \mathbf{W}^{(i)} \tag{10}$$

を得る。

F^+ の Hodge タイプは $(0,0)$ なので、この分解は各ファイバーの Hodge 構造と両立する、即ち各 $\mathbf{W}^{(i)}$ は $\mathbf{W}_{\mathbf{R}}$ の部分 R-VHS である。よって、Weil 作用素 C と偏極 $Q_{\mathbf{R}}$ は次のような分解を持つ。

$$C_s = \oplus_{i=1}^{t} C_s^{(i)}, \text{ for each } s \in S \tag{11}$$

$$Q_{\mathbf{R}} = \oplus_{i=1}^{t} Q^{(i)} \tag{12}$$

各埋め込み $\tau_i : \mathcal{F}^+ \hookrightarrow \mathbf{R}$ に対して、次のように置く。

$$F^{(i)} = F \otimes_{F^+,\tau_i} \mathbf{R}, \tag{13}$$

$$D^{\tau_i} = D \otimes_{F^+,\tau_i} \mathbf{R}, \tag{14}$$

$$\mathbf{V}^{\tau_i} = \mathbf{V} \otimes_{F^+,\tau_i} \mathbf{R}, \tag{15}$$

$$U^{\tau_i} = U \otimes_{F^+,\tau_i} \mathbf{R}. \tag{16}$$

$F^{(i)}$ は上の (R) 又は (C) の場合によりそれぞれ R 又は C に同形であり、D^{τ_i} は $F^{(i)}$ 上の中心的単純環であるので、ある division algebra$D^{(i)}$ が存在して

$$D^{\tau_i} \cong M_s(D^{(i)})$$

となる。この同形を固定し $\epsilon_{\nu\mu}^{i}$ を D^{τ_i} の行列成分とした時

$$\mathbf{V}^{(i)} := \epsilon_{11}^{i} \mathbf{V}^{\tau_i}, \qquad U^{(i)} := U^{\tau_i} \epsilon_{11}^{i}$$

と置く。これらはそれぞれ左または右 $D^{(i)}$ 加群である。

補題 4.1 $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}$ を重さ *-1, Hodge* タイプ *(-1,0)+(0, -1)* の S 上の *primary* **Q**-*VHS* とする。上の記号の下に次の同形が成り立つ。

$$\mathbf{W}^{(i)} \cong U^{(i)} \otimes_{D^{(i)}} \mathbf{V}^{(i)} \tag{17}$$

さらに各点 $s \in S^{an}$ に対し $\mathbf{W}_s^{(i)}$ の *Weil* 作用素 C_s は

$$C_s^{(i)} = I'^{(i)} \otimes I_s^{(i)} \tag{18}$$

と書ける。但しここで $I'^{(i)}$ と $I_s^{(i)}$ はそれぞれ $U^{(i)}$ と $\mathbf{V}_s^{(i)}$ の R- 線形作用素。

次に偏極 Q の係数拡大について述べる。

補題 4.2 $\iota_0^{(i)}$ を ι_0 が誘導する $D^{(i)}$ 上の対合、$Q = tr_{D/\mathbf{Q}}(h' \otimes_D \mathrm{h})$ を命題 *4.1*による偏極の分解とする。各 $1 \leq i \leq t$ に対し h は $\mathrm{V}^{(i)}$ 上の $\iota_0^{(i)}$ に対する $(\overline{D^{(i)}}, \epsilon\eta_i)$- エルミート形式、$h'$ は $U^{(i)}$ 上の $(D^{(i)}, -\epsilon\eta_i)$- エルミート形式を誘導し

$$Q^{(i)} = Tr_{D^{(i)}/\mathbf{R}}(h'^{(i)} \otimes_{D^{(i)}} h^{(i)}) \tag{19}$$

また、$Q^{(i)}$ の正値性から次の命題を得る。

命題 4.2 補題 *4.1*, 補題 *4.2*の仮定と記号の下、各 $1 \leq i \leq t$ について次の何れかが成立する。

$$(Case(1)) \qquad \begin{array}{ccc} I'^{(i)} = 1 & (I_s^{(i)})^2 = -1 & \epsilon\eta_i = -1, \\ h'^{(i)} >> 0 & and & \mathrm{h}_s^{(i)} I_s^{(i)} >> 0 \end{array}$$

$$(Case(2)) \qquad \begin{array}{ccc} (I'^{(i)})^2 = -1 & I_s^{(i)} = 1 & \epsilon\eta_i = 1, \\ h'^{(i)} I'^{(i)} >> 0 & and & \mathrm{h}_s^{(i)} >> 0. \end{array}$$

但しここで $\mathrm{h}_s^{(i)} I_s^{(i)}$ は双一次形式 $\mathrm{h}_s^{(i)}(x, I_s^{(i)} y)$ を表し "$h'^{(i)} >> 0$" は双一次形式が $D^{(i)}$-対称かつ正定値である事を表す。

5 Q-Symplectic 表現と代数群

前節及び前々節で、primary Q-VHS $\mathbf{W_Q}$ の分解(2),偏極 Q の分解(8)とその係数拡大の分解等を考察した。これと次に述べる Q-Symplectic 表現の概念より ほぼ分類は完成する。

5.1 Q-Symplectic 表現

久賀、志村等は指定した準同形環及び偏極を持つ Abel 多様体の universal family を研究したが、それは、Q- 代数群のある種の条件を満たす Symplectic 群への表現（Q-Symplectic 表現) より得られる久賀 - 佐武 - 志村ファイバー空間として一般化される。これは底空間を有界対称領域の数論的商空間（いわゆる志村多様体）とする Abel 多様体の family であり数論的にも代数幾何的にも非常に興味深いものである。Q-Symplectic 表現は上記の人達以外にも Mumford や佐武により深く研究されたが、佐武はほぼその分類を完成した（例えば [S1], [S2])。

$G_{\mathbf{Q}}$ を Q- 代数群で R-valued point $G_{\mathbf{R}}$ が Zariski 連結な半単純エルミート型の Lie 群となるものとする。$G_{\mathbf{R}}$ の極大部分群 K を一つ固定し $\mathcal{D} = G_{\mathbf{R}}/K$ を対応するエル

ミート有界対称領域とする。$\mathcal{G},\mathcal{K}$ を対応する Lie 環とし、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{K}$ の Killing 形式による直交補空間とする時、$H_0 \in Cent\mathcal{K}$ で $ad_{\mathcal{P}}(H_0)^2 = -1$ なる元が定数倍を除いて唯一存在する。この対 $(G_{\mathbf{Q}}, H_0)$ を $\mathbf{Q}$-*hermitian pair* と言う。

定義 5.1 $(W_{\mathbf{Q}}, \rho_{\mathbf{Q}}, Q_{\mathbf{Q}}, I)$ が $\mathbf{Q}$-*hermitian pair* $(G_{\mathbf{Q}}, H_0)$ の $\mathbf{Q}$-*Symplectic* 表現とは、
(i) $W_{\mathbf{Q}}$ が $2g$ 次元の $\mathbf{Q}$ ベクトル空間、
(ii) $Q_{\mathbf{Q}}$ は $W_{\mathbf{Q}} \times W_{\mathbf{Q}}$ 上の非退化 *symplectic* 形式、
(iii) 単射準同形 $\rho_{\mathbf{Q}}: G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow Sp(W_{\mathbf{Q}}, Q_{\mathbf{Q}})$
(iv) 複素構造 $I \in \mathcal{D}(W_{\mathbf{R}}, Q_{\mathbf{R}})$ で条件

$$[d\rho_{\mathbf{R}}(H_0) - (1/2)I, d\rho_{\mathbf{R}}(X)] = 0 \text{ for all } \quad X \in \mathcal{G}_{\mathbf{R}}$$

を満たすもの。但し $\mathcal{D}(W_{\mathbf{R}}, Q_{\mathbf{R}})$ は

$$\{I \in End(W_{\mathbf{R}}) |\ I^2 = -1_{W_{\mathbf{R}}},\ Q_{\mathbf{R}}(x, Iy) \text{ 非退化正定値対称形式}\}.$$

5.2 代数群

$\mathbf{W_Q}$ を S 上の重さ -1 Hodge タイプ (-1,0) + (0, -1) の primary $\mathbf{Q}$-VHS とする。命題 3.1, 命題 4.1より

$$\mathbf{W_Q} \cong U \otimes_D \mathbf{V} \tag{20}$$

$$Q = Tr_{D/\mathbf{Q}}(h' \otimes_D \mathbf{h}) \tag{21}$$

なる分解が得られる。$s \in S^{an}$ を固定しよう。これから我々は2つの F 代数群 $SU(\mathbf{V}_s, Q_s)$, $SU(U, h')$ が得られるが Weil の係数制限 functor $R_{F/\mathbf{Q}}$ を用いて、

$$G_{\mathbf{Q}} = R_{F/\mathbf{Q}}(SU(\mathbf{V}_s, \mathbf{h}_s)),\ G'_{\mathbf{Q}} = R_{F/\mathbf{Q}}(SU(U, h'))$$

なる $\mathbf{Q}$- 代数群を得る。自然な準同形

$$\begin{aligned}\rho_1 : G_{\mathbf{Q}} &= R_{F/\mathbf{Q}}(SU(\mathbf{V}_s, \mathbf{h}_s)) \longrightarrow SU(\mathbf{V}_s, \mathbf{h}_s)\\ \rho'_1 : G'_{\mathbf{Q}} &= R_{F/\mathbf{Q}}(SU(U, h')) \longrightarrow SU(U, h'),\end{aligned}$$

と上の分解 20 21より、表現

$$\rho = 1_U \otimes \rho_1 : G_{\mathbf{Q}} = R_{F/\mathbf{Q}}(SU(\mathbf{V}_s, \mathbf{h}_s)) \longrightarrow Sp(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, Q_s) \tag{22}$$

$$\rho' = \rho'_1 \otimes 1_{\mathbf{V}_s} : G'_{\mathbf{Q}} = R_{F/\mathbf{Q}}(SU(U, h')) \longrightarrow Sp(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, Q_s), \tag{23}$$

が得られる。

さて $G_{\mathbf{Q}}$, $G'_{\mathbf{Q}}$ の $\mathbf{R}$-valued points $G_{\mathbf{R}}$, $G'_{\mathbf{R}}$ を考えよう。補題 4.2より次の分解が存在する。

$$G_{\mathbf{R}} = \prod_{i=1}^{t} SU(\mathbf{V}_s^{(i)}, \mathbf{h}_s^{(i)}), \tag{24}$$

$$G'_{\mathbf{R}} = \prod_{i=1}^{t} SU(U^{(i)}, h'^{,(i)}). \tag{25}$$

次の定理が基本的である。

定理 5.1 上の記号の下に次が成立する。

(i) $\mathbf{Q}$- 代数群 $G_{\mathbf{Q}}$ と $G'_{\mathbf{Q}}$ は *Zariski* 連結かつ、その $\mathbf{R}$-*valued points* $G_{\mathbf{R}}, G'_{\mathbf{R}}$ は *reductive* エルミート型 $\mathbf{R}$- 代数群。

(ii) $G_{\mathbf{R}}$ または $G'_{\mathbf{R}}$ が *non-compact* であれば、半単純である。

(iii) $G_{\mathbf{R}}$ *(resp.* $G'_{\mathbf{R}}$*)* が *non-compact* の時、各点 $s \in S^{an}$ に対して、$G_{\mathbf{R}}$ *(resp.* $G'_{\mathbf{R}}$*)* の *H-element* $H_{0,s}$ *(resp.* $H'_{0,s}$) が存在し、$(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, \rho, Q_s, C_s)$ *(resp.* $(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, \rho', Q, C_s)$*)* が $\mathbf{Q}$-*hermitian pair* $(G_{\mathbf{Q}}, H_0)$ *(resp.* $(G'_{\mathbf{Q}}, H'_0)$*)* の $\mathbf{Q}$-*symplectic* 表現となる。

さて H'_0 を定理 5.1にある $G'_{\mathbf{R}}$ の H-element, $\mathcal{G}'_{\mathbf{R}} = \mathcal{K}' \oplus \mathcal{P}'$ をそれに対応する Lie 環の分解とする。$\mathcal{P}'_{\mathbf{C}} = \mathcal{P}'^{+} \oplus \mathcal{P}'^{-}$ を複素構造 $ad_{\mathcal{P}'}(H'_0)$ に対応する $\mathcal{P}'_{\mathbf{C}}$ の分解とする。

定理 5.2 上の記号の下に次の同形が成立する。

$$(\mathrm{End}^{Q}(\mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Z}_X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C})^{-1,1} \cong \mathcal{P}'^{+}. \tag{26}$$

この定理と系 2.1から次の系を得る。

系 5.1 *primary* $\mathbf{Z}$-*VHS* $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ が *rigid* になる必要十分条件は *(25)* の $\mathbf{R}$- 代数群 $G'_{\mathbf{R}}$ が *compact* になることである。

一方、$\pi_1(S, s)$ の $\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}$ へのモノドロミー表現は $\rho : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow Sp(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, Q_s)$ を経由する。即ち準同形

$$\mu_{1,s} : \pi_1(S, s) \longrightarrow G_{\mathbf{Q}} = R_{F/\mathbf{Q}}(SU(\mathbf{V}_s, h_s))$$

が存在し $\rho\mu_{1,s}$ がモノドロミー表現を与える。この事から次の命題が従う。

命題 5.1 *$G_{\mathbf{R}}$ が compact とすると、$\mathbf{Z}$-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ は iso-trivial である。よって対応する abelian scheme $f: X \longrightarrow S$ も iso-trivial。*

さて、(24) と (25) に於て、$G^{(i)} = SU(\mathbf{V}_s^{(i)}, \mathbf{h}_s^{(i)})$, $G'^{(i)} = SU(L'^{(i)}, h'^{(i)})$ と置こう。

命題 4.2の (**Case (1)**) 及び (**Case (2)**) に対して、

Case (1) $\Rightarrow$ $G'^{(i)}$ compact

Case (2) $\Rightarrow$ $G^{(i)}$ compact

が成立する。さらに **Case (1)** の時、小数の例外を除いて $G^{(i)}$ は non-compact, また **Case (2)** の時は $G'^{(i)}$ が non-compact になる。

これらの事と系 5.1, 命題 5.1から次が成立する。

系 5.2 *$f: X \longrightarrow S$ を abelian scheme, 対応する $\mathbf{Q}$-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}} \cong \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Q}_X$ が primary と仮定する。上の記号の下に次が成立する。*

(i) *$G^{(i)}$ が non-compact ならば、$G'^{(i)}$ は compact。特に $f: X \longrightarrow S$ が non-isotrivial ならば $G_{\mathbf{R}}$ は non-compact より、$G'_{\mathbf{R}}$ は compact factor を持つ。*

(ii) *$f: X \longrightarrow S$ が non-rigid ならば、$G'_{\mathbf{R}}$ は non-compact より、$G_{\mathbf{R}}$ は compact factor を持つ。*

(iii) *$f: X \longrightarrow S$ が non-isotrivial ならば、$G_{\mathbf{R}}$, $G'_{\mathbf{R}}$ 共に compact factor および non-compact factor の両方を持つ。特に、$t = [F^+; \mathbf{Q}] \geq 2$ 。*

6 主定理

6.1 佐武の分類

定理 5.1より、$\mathbf{Q}$-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}$ と各点 $s \in S^{an}$ に対し, 代数群 $G_{\mathbf{Q}}$, $G'_{\mathbf{Q}}$ 及びそれらの $\mathbf{Q}$-Symplectic 表現 ρ, ρ' が存在する事が解かった。ここで、佐武の $\mathbf{Q}$-Symplectic 表現の分類 ([S1], [S2]) を用いれば次の詳しい分類定理が得られる。

定理 6.1 $f: X \longrightarrow S$ を abelian scheme, 対応する $\mathbf{Q}$-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Q}_X$ が primary と仮定する。第3節、第4節の記号の下に次の何れかが成立する;

(R1) ($\epsilon=-1$) $D=F=F^+$ は総実代数体。$dim_F\mathbf{V}_s=n, dim_F U=m$ とすると

$$G_{\mathbf{R}}\cong\underbrace{Sp_{n/2}(\mathbf{R})\times\cdots\times Sp_{n/2}(\mathbf{R})}_{d\times(III)_{n/2}}.$$
$$G'_{\mathbf{R}}\cong\underbrace{SO_m(\mathbf{R})\times\cdots\times SO_m(\mathbf{R})}_{d\times compact}.$$

となる。

(R2, ϵ **)** $F=F^+$ は総実代数体で、D は F 上の四元数体。$rank_D\mathbf{V}_s=n, rank_D U=m$ と置く。

$$D\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}\cong\underbrace{\mathbf{H}\times\cdots\times\mathbf{H}}_{t'}\times\underbrace{M_2(\mathbf{R})\times\cdots\times M_2(\mathbf{R})}_{t-t'}$$

と、埋め込み $\tau_i:F\hookrightarrow\mathbf{R}$ の順番を取り替えておくと $\epsilon=\pm1$ によって次の何れかが成り立つ。

($\epsilon=1$)

$$G_{\mathbf{R}}=\underbrace{SU_n(\mathbf{H})\times\cdots\times SU_n(\mathbf{H})}_{t'\times compact}\times\underbrace{Sp_n(\mathbf{R})\times\cdots\times Sp_n(\mathbf{R})}_{(t-t')\times(III)_n}.$$
$$G'_{\mathbf{R}}=\underbrace{SU_m(\mathbf{H})^-\times\cdots\times SU_m(\mathbf{H})^-}_{t'\times(II)_m}\times\underbrace{SO_{2m}(\mathbf{R})\times\cdots\times SO_{2m}(\mathbf{R})}_{(t-t')\times compact}.$$

($\epsilon=-1$)

$$G_{\mathbf{R}}=\underbrace{SU_n(\mathbf{H})^-\times\cdots\times SU_n(\mathbf{H})^-}_{t'\times(II)_n}\times\underbrace{SO_{2n}(\mathbf{R})\times\cdots\times SO_{2n}(\mathbf{R})}_{(t-t')\times compact}.$$
$$G'_{\mathbf{R}}=\underbrace{SU_m(\mathbf{H})\times\cdots\times SU_m(\mathbf{H})}_{t'\times compact}\times\underbrace{Sp_m(\mathbf{R})\times\cdots\times Sp_m(\mathbf{R})}_{(t-t')\times(III)_m}.$$

(C) F は総実代数体 F^+ の総虚二次拡大体。$[D:F]=r^2$, $rank_D\mathbf{V}_s=n, rank_D U=m$ と置く。

$$G_{\mathbf{R}}\cong\prod_{i=1}^{t'}\underbrace{SU(p_i,q_i,\mathbf{C})}_{(I)_{p_iq_i}}\times\underbrace{SU_{nr}(\mathbf{C})\times\cdots\times SU_{nr}(\mathbf{C})}_{(t-t')\times compact}.$$
$$G'_{\mathbf{R}}\cong\underbrace{SU_{nr}(\mathbf{C})\times\cdots\times SU_{nr}(\mathbf{C})}_{(t'\times compact)}\times\prod_{i=t'+1}^{t}\underbrace{SU(p'_i,q'_i,\mathbf{C})}_{(I)_{p'_iq'_i}}$$

となる。

Remark 6.1 エルミート有界対称領域

$$\begin{aligned}
(III)_m &= \{Z \in M_m(\mathbf{C}) | {}^tZ = Z, 1_m - {}^t\overline{Z}Z >> 0\}, \\
(II)_n &= \{Z \in M_n(\mathbf{C}) | {}^tZ = -Z, 1_n - {}^t\overline{Z}Z >> 0\}, \\
(I)_{pq} &= \{Z \in M(p,q,\mathbf{C}) | 1_q - {}^t\overline{Z}Z >> 0\}.
\end{aligned}$$

の次元、群との関係を述べると次の表となる。

$G_{\mathbf{R}}$	$\mathcal{D} = \mathcal{D}(T,h)$	$dim_{\mathbf{C}}\mathcal{D}$	$\mathbf{R}$-$rank$
$Sp_{n/2}(\mathbf{R})$	$(III)_{n/2}$	$(n/2)(n/2+1)/2$	$n/2$
$SU_n(\mathbf{H})^-$	$(II)_n$	$n(n-1)/2$	$[n/2]$
$SU(p,q,\mathbf{C})$	$(I)_{pq}$	$p \cdot q$	$min(p,q)$

Remark 6.2 系 5.2, 定理 6.1と上の Remark より、primary $\mathbf{Q}$-VHS $\mathbf{W_Q}$ が non-isotrivail かつ non-rigid ならば、

(R2, 1) $t' > 0,\ t - t' > 0,\ n \geq 1,\ m \geq 2$

(R2, -1) $t' > 0,\ t - t' > 0,\ n \geq 2,\ m \geq 1$

(C) $t' > 0,\ t - t' > 0,\ nr \geq 2,\ mr \geq 2$

の何れかでなければ成らない。

6.2 GEOMETRIC RESULTS

定理 6.1, Remark 6.2より次の主定理が得られる。

定理 6.2 $f : X \longrightarrow S$ を *abelian scheme* で対応する $\mathbf{Q}$-*VHS* $\mathbf{W_Q} = \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Q}_X$ が *primary* と仮定する。$\mathbf{W_Q} = U \otimes_D \mathbf{V}$ を命題 *3.1*の分解、$rank_D \mathbf{V} = n, rank_D U = m$, $[F^+ : \mathbf{Q}] = t$ とする。(記号は第3節、4節を見よ。) $f : X \longrightarrow S$ は *isotrivial factor* を持たず、かつ *non-rigid* とする。次の何れかが成り立つ。

(R) $F = Cent(D)$ が総実代数体ならば、D は F 上の四元数体で、

$$D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \underbrace{\mathbf{H} \times \cdots \times \mathbf{H}}_{t'} \times \underbrace{M_2(\mathbf{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbf{R})}_{t-t'}$$

となるもの。この時 $f : X \longrightarrow S$ の相対次元を g とすると、

$$g = (1/2)rank_{\mathbf{Q}} U \otimes_D \mathbf{V} = 2 \cdot t \cdot n \cdot m$$

であり、また $t' > 0$, $t - t' > 0$ かつ **(R2, 1)** $n \geq 1$, $m \geq 2$ または **(R2, -1)** $n \geq 2$, $m \geq 1$ でなければならない。よって、特に g は *8* 以上の偶数である。

(C) $F = Cent(D)$ が *CM* 体ならば $[F : \mathbf{Q}] = 2t$ であり

$$D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \underbrace{M_r(\mathbf{C}) \times \cdots \times M_r(\mathbf{C})}_{t}.$$

となる。この時相対次元 g は

$$g = (1/2) \cdot 2t \cdot nr \cdot mr = t \cdot nr \cdot mr$$

で与えられるが、やはり $t \geq 2$, $nr \geq 2$, $mr \geq 2$ でなければならない。特に、$g \geq 8$.

系 6.1 $f : X \longrightarrow S$ を isotrivial factor を持たない相対次元 g の *abelianscheme* とする。$g \leq 7$ ならば $[f]$ は rigid。

系 6.2 $f : X \longrightarrow S$ を生成ファイバー X_η が simple abelian variety なる non-isotrivial abelian scheme とする。もし、相対次元 g が素数ならば f は rigid。

6.3 モノドロミー定理

系 5.2と VHS の局所モノドロミーの quasi-unipotency から次の定理を得る。

定理 6.3 *$f : X \longrightarrow S$ を abelian scheme で対応する $\mathbf{Q}$-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}_1 f_* \mathbf{Q}_X$ が primary と仮定する。S^{an} が non-compact かつ無限遠のまわりのある局所モノドロミーが無限位数であったとすると、f は rigid.*

Remark 6.3 定理 *6.2*は *sharp*。即ち、定理 *6.2*の t, n, m の条件を満たせば久賀-佐武-志村ファイバー空間によって、定理の条件を満たす *noniotrivia* かつ *non-rigid* な *abelian scheme* が構成される。このことから、*Faltings* の構成した *8* 次元のファミリーの他、CM体を準同形環にもった *8* 次元の *family* を構成できる。これについては *[Sa1]* を見よ。

7 有界性定理ほか

7.1 野口の定理

野口は [N] に於て、compact 複素多様体の Zariski 開集合 S から有界対称領域 $\mathcal{D}$ の離散部分群 Γ による商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ への正則写像のモジュライ空間 $Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ の構造を研究し次の著しい結果を得た。

定理 7.1 $\Gamma\subset Aut(\mathcal{D})$ は *torsion-free* な数論的離散部分群または $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ が *compact* なるものとする。

(i) $Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ は非特異準射影多様体である。

(ii) Z を $Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ の連結成分とする。Z はある有界対称領域 $\mathcal{D}'$ の商空間 $\Gamma'\backslash\mathcal{D}'$ と正則同型であり各点 $s\in S$ についての *evaluation mapping*

$$\Phi_{s|Z}:Z\ni h\mapsto h(s)\in\Gamma\backslash\mathcal{D}$$

は全測地的埋め込み *(totally geodesic embedding)* である。

さて、$h_0\in Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ で $dim_{h_0}Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})>0$ のものをとる。(h_0 は non-rigid。) 上の定理 7.1(ii) より h_0を含む $Hol(S,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ の連結成分 Z （$dimZ>0$) はある $\Gamma'\backslash\mathcal{D}'$ と同型。

$$\Psi:Z\times S\ni(h,s)\mapsto h(s)\in\Gamma\backslash\mathcal{D}$$

なる写像を考えると $Hol(Z,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ の universal property から、正則写像 $\alpha:S\rightarrow Hol(Z,\Gamma\backslash\mathcal{D})$ が得られる。Z' を $\alpha(S)$ を含む連結成分とすると再び $Z'=\Gamma''\backslash\mathcal{D}''$ と書ける。

$$S\times\{h_0\}\rightarrow Z'\times Z\xrightarrow{\tilde{\Psi}}\Gamma\backslash\mathcal{D}$$

であり $Z'\times Z=\Gamma''\backslash\mathcal{D}''\times\Gamma'\backslash\mathcal{D}'$ である。定理 7.1(ii) より $\tilde{\Psi}$ を $Z'\times Z$ の各成分に制限すると全測地的埋め込み（即ち局所対称空間としての埋め込み）であるが、さらに次が野口 - 宮野 [N-M] によって示されている。

定理 7.2 $\tilde{\Psi}$ は全測地的埋め込みである。

これらの結果と我々の結果との関係を述べて置こう。我々の場合 $\mathcal{D}$ は ジーゲル上半空間 $\mathcal{H}_g$ であり、Γ は数論的離散部分群である。Γ は適当な有限指数の正規部分群とることにより torsion-free に出来るから、そう仮定する。上の野口 - 宮野の結果から

得られる全測地埋め込み Ψ は実は群のレベルから来ている。それも、$\mathbf{Q}$ 上の代数群の $\mathbf{Q}$-Symplectic 表現から導かれている。これが実は第5節の (22), (23) で得られた $\mathbf{Q}$-symplectic 表現 ρ, ρ' である。ρ, ρ' わ互いに可換な表現であり、また

$$\rho' \otimes \rho : G'_{\mathbf{Q}} \times G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow Sp(\mathbf{W}_{\mathbf{Q},s}, Q)$$

も $\mathbf{Q}$-Symplectic 表現であり、このテンサー表現 $\rho' \otimes \rho$ が上の $\widetilde{\Psi}$ に対応するものである。

Remark 7.1 野口の結果は（小林の意味での）双曲的距離の理論を本質的に用いている。また、$\Gamma \backslash \mathcal{D}$ が *compact* の時は砂田 *[Su1], [Su2]* がある。また、伊原 - 久賀 *[I-K]* も参照のこと。

7.2 Deligne の結果

Deligne は、Faltings[F1] の結果に触発されて、[D2] に於て VHS の モノドロミー表現の有限性を示している。

S を非特異準射影的多様体、$\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ を任意の重さの偏極 Z-VHS とする。S 上の $\mathbf{Q}$-ベクトル空間の局所系 $\mathbf{V}$ は, ある偏極 Z-VHS $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ があって、$\mathbf{V}$ が $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}$ の部分局所系となるとき部分 Hodge タイプと呼ぶ。

定理 7.3 S と正整数 N を固定する。階数 N の部分 Hodge タイプの局所系の同型類は有限個しかない。

証明の概略は、Tate 予想の証明に似て興味深い。まず、Deligne[D1](または Schmit) に於て示された VHS に対するモノドロミー表現の半単純性から、モノドロミー表現 $\rho : \pi_1(S,s) \longrightarrow GL(N,\mathbf{Q})$ は指標 χ_ρ によって決定されるから、指標の有限性を言えば良い。$\pi_1(S)$ は有限生成で有るから、その生成元 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ を取れば指標 χ_ρ は、$\chi_\rho(\gamma_i), (i = 1, \cdots, m)$ によって決定される。 A を $X = GL(N,\mathbf{Q})^m$ の座標環として、$GL(N,\mathbf{Q})$ の対角作用による不変環 $A^{GL(N,\mathbf{Q})}$ を考える。Procesi によれば、$A^{GL(N,\mathbf{Q})}$ は $Tr(g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_s})$ の形の元によって生成される。Hilbert によれば、$A^{GL(N,\mathbf{Q})}$ は有限生成環であるから有限個の $Tr(g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_s})$ によって生成されていることが解かる。それに対応する $\pi_1(S)$ の有限部分集合 T を取ると、各指標 χ_ρ は $\{Tr(\rho(\gamma)), \gamma \in T\}$ の多項式で表せる。 よって、$Tr(\rho(\gamma)), \gamma \in T$ の値の有限性を示せばよいが、今の場合 $Tr(\rho(\gamma))$ は $\mathbf{Z}$ に値を取るので 次の補題により証明が完結する。

補題 7.1 各 $\gamma \in \pi_1(S)$ に対してある定数 $C(\gamma) > 0$ が存在し全ての ρ について

$$|Tr(\rho(\gamma))| \leq C(\gamma)$$

この補題の証明にはやはり小林双曲計量の縮小原理を用いる。

又、次の結果も成り立つ。

定理 7.4 S と正整数 N、また重さmを固定する。 S 上の重さmの偏極 $\mathbf{Z}$-VHS$\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ で、 $\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}$ の階数が N で Hodge タイプ及び偏極のタイプを固定したとき、

$$\mathrm{End}(\mathbf{W}_{\mathbf{Z}}) = \mathrm{End}(\mathbf{W}_{\mathbf{Z}})^{0,0}$$

なる偏極 $\mathbf{Z}$-VHS は有限個。

References

[D1] Deligne, P., *Théorie de Hodge, II*, Publ. Math. IHES, **40** (1971), 5-57.

[D2] Deligne, P., *Un Théorème de finitude pour la Monodromie*, Discrete groups in Geometry and analysis, vol. 67, Birkhäuser, 1987, pp. 1-19.

[F1] Faltings, G., *Arakelov's Theorem for Abelian Varieties*, Invent. math. **73** (1983), 337-347.

[F2] Faltings, G., *Endlichkeitssätze für abelsche Varietären über Zahlkörpern*, Invent. math. **73** (1983), 349-366.

[K-I] Kuga, M., Ihara, S., *Family of families of abelian varieties;* Algebraic Number Theory (Kyoto 1976), Japan Soc. for Prom. Sci., Tokyo, 1977, pp. 129-142.

[N] Noguchi, J., *Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces*, Invent. math. **93** (1988), 15-34.

[N-M] Miyano, T., Noguchi, J., *Moduli spaces of harmonic and holomorphic mappings and Diophantine geometry*, Springer Lec. Note **1468** (1989),

[P] Peters, C., *Rigidity for variations of Hodge structure and Arakelov-type finiteness theorems*, Comp. Math. **75** (1990), 113-126.

[S-Z] Saito, M. H., Zucker, S., *Classification of non-rigid families of K3 surfaces and a finiteness theorem of Arakelov-type*, Math. Ann. **289** (1991), 1-31.

[Sa1] Saito. M. -H., *Classification of non-rigid families of abelian varieties,* preprint, Kyoto (1991).

[S1] Satake, I., *Algebraic structure of symmetric domains* Publication of the Math. Soc. of Japan, 14, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1980.

[S2] ——, *Symplectic representations of algebraic groups satisfying a certain analyticity condition*, Acta Math. **117** (1967), 215-279.

[Sh1] Shimura, G., *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Ann. of Math. **78** (1963), 149-192.

[Sh2] ——, *Moduli and fiber systems of abelian varieties*, Ann. of Math. **83** (1966), 294-338.

[Sh3] ——, *Discontinuous groups and abelian varieties*, Math. Ann. **168** (1967), 171-199.

[Su1] Sunada, T., *Holomorphic mappings into a compact quotient of symmetric bounded domain*, Nagoya Math. J. **64** (1976), 159-175.

[Su2] ——, *Rigidity of certain harmonic mappings*, Invent. Math. **51** (1979), 297-307.